Февраль 1994 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 164, № 2*

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТЕОРЕМА БЕЛЛА БЕЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О ЛОКАЛЬНОСТИ

А.В. Белинский

Одно из допущений Белла при выводе его неравенств заключалось в предположении о локальности — отсутствии влияния двух удаленных измерительных приборов друг на друга. Поэтому нарушения этих неравенств, наблюдаемые в экспериментах, часто трактуют как проявление нелокальности квантовой теории или опровержение локального реализма. В настоящей работе выведено неравенство Белла в его традиционной форме, но без использования гипотезы о локальности, исходя лишь из условия неотрицательности функций распределения вероятностей. Те же функции распределения рассчитаны применительно к конкретному оптическому эксперименту в рамках квантовой теории и показано, что они могут принимать отрицательные значения. Таким образом, строго доказана непричастность предположения о локальности к нарушениям неравенств Белла. Проанализирован физический смысл полученных результатов.

PACS numbers: 03.65. — w

Посвящается памяти
Юрия Яковлевича Юшина

Содержание

1. Введение

Несмотря на, казалось бы, основательную проработку вопросов, связанных с парадоксом Эйнштейна—Подольского—Розена (ЭПР) [1] и теоремой Белла [2], поток публикаций на эту тему в последнее время заметно возрастает (см., например, [3] и цитируемую там литературу). Предсказанное квантовой теорией и неоднократно проверенное экспериментально нарушение неравенства Белла подавляющим большинством авторов трактуется как проявление *нелокальности* квантовой теории. Дело в том, что оригинальные неравенства Белл [2] вывел на основании концепций *теории скрытых параметров* [1], *одним* из допущений которой является предположение о *локальности*, т.е. отсутствии влияния двух удаленных измерительных приборов друг на друга. Логическая непоследовательность необходимости привлечения понятия нелокальности для объяснения невыполнения неравенств Белла показана в недавнем обзоре [3] (см. также [4—7]). Сформулировать строгое доказательство теоремы Белла без использования гипотезы о локальности — цель данной работы.

А.В. Белинский. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 119899, Москва, Воробьевы горы
Тел. (095)939-11-04
Fax (095) 939-31-13
E-mail: ilc@compnet. msu.su

Статья поступила 14 октября 1993 г.

2. Неравенство Белла

Используя алгоритм, аналогичный описанному в [6], выведем неравенство Белла в его традиционной форме

$$|\langle AB\rangle + \langle A'B\rangle + \langle AB'\rangle - \langle A'B'\rangle| \le 2 \quad (1)$$

без допущения о локальности. Другой вид неравенства получен в [6]; здесь A, A', B, B' — дихотомные переменные, принимающие единичные значения:

$$A,\ A',\ B,\ B' = \pm 1. \quad (2)$$

Усреднение производится по реализациям. Для доказательства (1) необходима *только* неотрицательность дискретных нормированных функций распределения вероятностей:

$$W(A,\ A',\ B,\ B') \ge 0,\ W(A,\ B,\ B') \ge 0 \text{ и т.д.}, \quad (3)$$

$$\sum_{A,\,A',\,B,\,B'} W(A,\ A',\ B,\ B') = 1,$$

$$\sum_{A,\,B,\,B'} W(A,\ B,\ B') = 1 \text{ и т.д.} \quad (4)$$

Разумеется, выполняются условия соответствия:

$$W(A,\ A',\ B,\ B') + W(-A,\ A',\ B,\ B') =$$

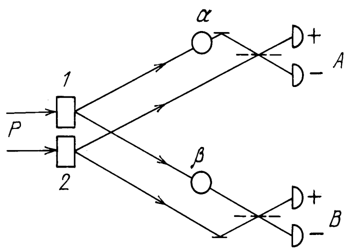

Схема интерферометра интенсивности с параметрическими источниками излучения для двух наблюдателей A и B. Коррелированные фотоны рождаются одновременно в нелинейных элементах *1* или *2* под действием общей когерентной накачки P и направляются к A и B по двум модам, одна из которых испытывает фазовую задержку (кружки). Моды смешиваются на 50%-ных светоделителях (штриховые отрезки) и детектируются

$$= W(A', B, B') \ge W(A, A', B, B'), \tag{5}$$

аналогично для других переменных и низших размерностей распределений.

Согласно свойству (5) можно записать

$$W(A, B, B') = W(A, A', B, B') + W(A, -A', B, B') \le \le W(A', B') + W(-A', B) = = W(A', B') + W(B) - W(A', B). \tag{6}$$

Аналогично

$$0 \le W(A, -B, -B') = = W(A, -B) - W(A, -B, B') = = W(A) - W(A,B) - W(A,B') + W(A, B, B'). \tag{7}$$

Перенесем последнее слагаемое (7) в левую часть неравенства (к нулю) и сложим получившееся соотношение с неравенством (6). В результате получим

$$0 \le W(A) + W(B) - W(A, B) - - W(A', B) - W(A, B') + W(A', B'), \tag{8}$$

или

$$\Lambda(A, A', B, B') \equiv W(A, B) + W(A', B) + W(A, B') - - W(A', B') - W(A) - W(B) \le 0. \tag{9}$$

Запишем далее

$$W(B, B') = W(B) - W(B, -B'). \tag{10}$$

Аналогично

$$W(-B, -B') = W(-B') - W(B, -B') = = 1 - W(B') - W(B, -B'). \tag{11}$$

Вычтем из (11) равенство (10). В результате получим

$$W(-B, -B') = 1 - W(B) - W(B') + W(B, B'). \tag{12}$$

Это соотношение вместе с равенством (7) подставим в следующее неравенство

$$0 \le W(-A, -B, -B') = W(-B, -B') - W(A, -B, -B'). \tag{13}$$

Тогда

$$0 \le 1 - W(A) - W(B) - W(B') + W(A, B) + W(A, B') + +W(B, B') - W(A, B, B') = 1 - W(A) - W(B) - -W(B') + W(A, B) + W(A, B') + W(-A, B, B'). \tag{14}$$

Последнее слагаемое здесь подчинено неравенству

$$W(-A, B, B') = W(-A, A', B, B') + +W(-A, -A', B, B') \le W(A', B) + W(-A', B') = = W(A', B) + W(B') - W(A', B'), \tag{15}$$

откуда

$$0 \le 1 - W(A) - W(B) + W(A, B) + W(A', B) + +W(A, B') - W(A', B'), \tag{16}$$

или, с учетом (9),

$$-1 \le \Lambda(A, A', B, B') \le 0. \tag{17}$$

Представим входящие в (1) средние через совместные вероятности, например

$$\langle AB \rangle = W_{AB}(++) + W_{AB}(--) - -W_{AB}(+-) - W_{AB}(-+), \tag{18}$$

где $W_{AB}(++) \equiv W(A = +1, B = +1)$ и т.д.

В результате непосредственной подстановки можно убедиться в том, что

$$\langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle = \Lambda(++++) + +\Lambda(----) - \Lambda(+-+-) - \Lambda(-++-+). \tag{19}$$

Согласно (17) имеем

$$-2 \le \Lambda(++++) + \Lambda(----) \le 0, \tag{20}$$

$$0 \le -\Lambda(+-+-) - \Lambda(-+-+) \le 2. \tag{21}$$

Складывая (20) и (21), с учетом (19) получим итоговый результат (1). Подчеркнем, что предположение о локальности в его выводе не использовано.

3. Пример и причина невыполнения неравенства Белла (1)

Почему же (1), базирующееся на весьма общих посылках, нарушается на практике? Отсутствие ответа на этот вопрос в работе [6], видимо, и привело к ее незаслуженному игнорированию.

Рассмотрим схему простейшего эксперимента по проверке (1) [3,8,9]. Два наблюдателя (см. рисунок) A и B одновременно регистрируют каждый по одному фотону на детекторах "+" или "−", приписывая этим событиям значения A, $B = +1$ или -1. Изменяя фазовые задержки α на α' и(или) β на β', осуществляется переход от переменных A и B к A' и(или) B'. Многократное повторение измерений позволяет вычислить входящие в (1) средние.

Квантовое состояние поступающих к наблюдателям фотонов описывается волновым вектором [3]

$$|\psi\rangle = (1/\sqrt{2})\,(a_1^+ b_1^+ + a_2^+ b_2^+)|0\rangle \equiv \equiv (1/\sqrt{2})\,(|10\rangle_a |10\rangle_b + |01\rangle_a |01\rangle_b), \tag{22}$$

где a_j^+ и b_j^+ — операторы рождения фотонов в двух сигнальных (поступающих к наблюдателю A) и холостых (к B) модах, $j = 1{,}2$ соответствует номеру кристалла, излучающего данную моду (см. рисунок), а $|0\rangle$ обозначает вакуум.

Операторы чисел фотонов, регистрируемых детекторами "+" и "−" в канале A, имеют вид

$$n_\pm^a \equiv a_\pm^+ a_\pm = (1/2)\,[n_1^a + n_2^a \pm (\sigma_-^a e^{i\alpha} + \sigma_+^a e^{-i\alpha})], \quad (23)$$

где $n_j^a \equiv a_j^+ a_j$, $\sigma_-^a \equiv a_1 a_2^+$, $\sigma_+^a \equiv (\sigma_-^a)^+$, $j = 1, 2$. Аналогичные соотношения определяют $n_\pm^b$ в канале B.

Найдем функцию распределения $W(A, A', B, B')$, вычислив совместные вероятности, равные соответствующим моментам:

$$\begin{aligned} &W_{AA'BB'}(++++) \equiv \\ &\quad \equiv W(A = +1,\ A' = +1,\ B = +1, B' = +1) = \\ &\quad = \langle\psi| n_+^a n_+^{a'} n_+^b n_+^{b'} |\psi\rangle, \\ &W_{AA'BB'}(+++-) = \langle\psi| n_+^a n_+^{a'} n_+^b n_-^{b'} |\psi\rangle \ \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (24)$$

Штрихи здесь означают замену α на α' в (23) и(или) β на β' в канале B.

Установим следующие фазы в каналах:

$$\alpha = 0,\ \alpha' = \pi/2,\ \beta = -\pi/4,\ \beta' = \pi/4, \quad (25)$$

что соответствует нарушениям (1). В результате получим матричные элементы (нижние индексы опущены)

$$\begin{aligned} &W(++++) = W(+--+) = \\ &\quad = W(-++-) = W(----) = \sqrt{2}/16, \\ &W(++--) = W(+-+-) = W(-+-+) = \\ &\quad = W(--++) = -\sqrt{2}/16, \\ &W(++-+) = W(+---) = W(-+++) = \\ &\quad = W(--+-) = (2-\sqrt{2})/16, \\ &W(+++-) = W(+-++) = W(-+--) = \\ &\quad = W(---+) = (2+\sqrt{2})/16. \end{aligned} \quad (26)$$

Отрицательны и некоторые трехмерные вероятности, например,

$$\begin{aligned} &W_{A'BB'}(+++) = W(-++) = \\ &\quad = W(+--) = W(---) = 1/8, \\ &W_{A'BB'}(--+) = W(++-) = (1+\sqrt{2})/8, \\ &W_{A'BB'}(+-+) = W(-+-) = (1-\sqrt{2})/8. \end{aligned} \quad (27)$$

Итак, *единственной* причиной невыполнения (1) является отрицательность функций распределения вероятностей, т.е. несоблюдение (3) и, как следствие, нарушение неравенства (5). Согласно (26), (27) при этом условия нормировки (4) и равенства типа (5) (условия соответствия) выполняются.

4. Заключение

Отрицательные распределения вероятности в связи с парадоксом ЭПР и теоремой Белла встречались в литературе [10—15]. Однако определение функции распределения в форме $W(A, A', B, B')$ позволяет путем непосредственного сопоставления (27) с исходными посылками (3)—(5) сделать однозначный вывод о роли локальности, точнее, об отсутствии таковой, в нарушении (1). Нет необходимости также в привлечении "скрытых параметров".

Функция распределения $W(A, A', B, B')$ аналогична распределению Вигнера. Не все входящие в нее наблюдаемые описываются коммутирующими операторами, например, A и A'. Они не могут быть измерены в одной реализации (единственный фотон наблюдателю A никак не зарегистрировать при различных фазовых задержках α и α'). Следовательно, прямые измерения $W(A, A', B, B')$ невозможны. Однако косвенные методы измерений функций распределений такого типа все же допустимы. Так, в [16] предложена и экспериментально реализована оригинальная методика, предназначенная, правда, для непрерывных двумерных вигнеровских распределений, в том числе и отрицательных. Может быть, следует примириться с отрицательной вероятностью, рассматривая ее, следуя Дираку [17], как вполне определенный математически аналог отрицательной суммы денег (см. также [12])?

Действительно, продвигаясь по доказательству (1) в обратном направлении от экспериментально зарегистрированных средних, получим хоть и не конкретные значения вероятностей вида (26), (27), но, по крайней мере, необходимость части из них быть отрицательными.

Вот еще одна аналогия. Отрицательных температур в шкале Кельвина не существует. Однако в квантовой электронике широко используется формальное описание инверсной населенности с помощью отрицательной температуры. Градусником ее не измерить, но выяснить состояние рабочих уровней и вычислить эту отрицательную температуру можно. Таким образом, формальное признание существования функции распределения $W(A, A', B, B')$, что следует из концепций теории скрытых параметров, не оставляет места для требования ее неотрицательности.

Настоящая работа не претендует на охват всевозможных квантовых эффектов и выяснение проблемы нелокальности в квантовой теории вообще. Например, как нелокальное можно трактовать поведение одиночного фотона в интерферометре Маха—Цендера в том смысле, что он одновременно принадлежит двум пространственно разделенным модам (плечам) интерферометра (см. также [3]). Приведенное рассмотрение, тем не менее, позволяет утверждать, что нарушение неравенств Белла *не дает* оснований говорить о присущей квантовой механике необъяснимой нелокальности и привлекать в этой связи на помощь мистику.

Я благодарен Ю.А. Ильинскому, Г.Х. Китаевой, Д.Н. Клышко, С.П. Кулику, А.Н. Пенину, М.В. Чеховой за полезные обсуждения. Эта работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, код проекта 93-02-14848. Я также благодарен Международному научному фонду Сороса за финансовую поддержку.

Список литературы

1. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. *Phys Rev*. **47**, 777 (1935); перевод *УФН* **16**, 440 (1936).
2. Bell J.S. *Physics* **1**, 195 (1964).
3. Белинский А.В., Клышко Д.Н. *УФН* **163** (8), 1 (1993).

4. Clauser J.F., Horne M.A. *Phys. Rev. D* **10**, 526 (1974).
5. Fine A. *Phys. Rev. Lett.* **48**, 291 (1982).
6. De Muynck W.M. *Phys. Lett. A* **114**, 65 (1986).
7. Klyshko D.N. *Phys. Lett. A* **172**, 399 (1993).
8. Klyshko D.N. *Phys. Lett. A* **132**, 299 (1988).
9. Rarity J.G., Tapster P.B. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2495 (1990).
10. Ivanovic J.D. *Lett. Nuovo Cimento.* **22**, 14 (1978).
11. Polubarinov I.V. *Communication of the Joint Institute for Nuclear Research* E2-88-80 (Dubna).
12. Muckenheim W. *Lett. Nuovo Cimento.* **35**, 300 (1982).
13. Home D., Lepore V.L., Selleri F. *Phys. Lett. A* **158**, 357 (1991).
14. Wodkiewicz K. *Phys. Lett. A* **129**, 1 (1988).
15. Agarwal G.S., Home D., Schleich W. *Phys. Lett. A* **170**, 359 (1992).
16. Smithey D.T., Beck M., Raymer M.G., Faridani A. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1244 (1993).
17. Dirac P.A.M. *Proc. Roy. Soc.* (*London*). *A* **180**, 1 (1941).

BELL'S THEOREM WITHOUT THE HYPOTHESIS OF LOCALITY

A.V. Belinsky
M.V. Lomonosov Moscow State, University, Physics Department Vorob'yovy Gory, 119899, Moscow, Russian Federation.
Tel. (*095*) *939-1104.*
Fax (*095*) *939-3113.*
E-mail: ilc@compnet.msu.su

One of the Bell's assumptions in this original derivation of the inequalities was the locality one, i. e. the independence of two separated measuring devices. That is why the Bell inequalities breaking, observed in the experiments, is often interpreted as a demonstration of nonlocal quantum mechanic features or the contradiction to the *local realism*. In this work a straightforward derivation of the Bell inequalities traditional form is given, without appealing to locality, but based only on the assumption that the probability distributions is to be nonnegative. The same probability distributions are calculated for the concrete optical experiment under the quantum theory consideration, and it is shown that they can be negative. So, the irrelevance of the Bell inequalities breaking to the locality assumption is strictly proved. The physical nature of the obtained results is examined.
Bibliography — 17 references.

Received 14 October 1993