Задача по квантовым вычислениям

Путенихин П.В.
m55@mail.ru

Аннотация

Рассмотрена в учебных целях задача по измерению поляризованных фотонных потоков с различной поляризацией с помощью одного и того же поляризатора. Вычисления вероятности прохождения этих фотонов произведены с использованием проективной математики квантовых вычислений.

В большинстве учебников по квантовой информатике приводятся математические выражения для анализа квантовых схем. Для лучшего понимания механизмов квантовых вычислений рассмотрим в порядке практикума одну из частных задач по измерению состояния поляризованного потока фотонов. В общем случае поляризованный поток фотонов может быть описан волновой функцией следующего вида:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

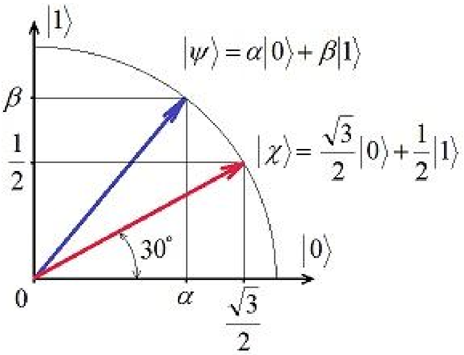
Каждый из фотонов рассматривается как кубит, описываемый этой волновой функцией. Коэффициенты α и β у всех кубитов одинаковые и в процессе решения задачи будут принимать некоторые определённые значения. Для изучения механизма измерения фотонов воспользуемся измерителем – поляризатором, наклоненным к горизонтали под углом 30^o. Этот поляризатор может быть также описан волновой функцией, в нашем случае имеющей вид:

$$|\chi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \qquad (1)$$

Проектор такого измерителя, согласно математике квантовых вычислений, имеет вид:

$$|\chi\rangle\langle\chi| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right) = \frac{1}{2}\left(3|0\rangle\langle 0| + \sqrt{3}|1\rangle\langle 0| + \sqrt{3}|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1|\right)$$

Графически исследуемый кубит (синяя стрелка) и поляризатор 30^o (красная стрелка) можно изобразить таким образом:



Исследуемый кубит на рисунке показан условно, для некоторых неопределённых заранее проекций α и β. На самом деле вектор кубита может иметь любой угол по отношению к поляризатору. Напротив, используемый поляризатор имеет фиксированный угол наклона 30^o к горизонтали. Действие, которое поляризатор окажет на исследуемые произвольные кубиты, согласно математике квантовых вычислений описывается проектором:

$$|\chi\rangle\langle\chi|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(3|0\rangle\langle 0| + \sqrt{3}|1\rangle\langle 0| + \sqrt{3}|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1|\right)\left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right)¶$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\alpha|0\rangle\langle 0||0\rangle + \sqrt{3}\alpha|1\rangle\langle 0||0\rangle + \sqrt{3\alpha}|0\rangle\langle 1||0\rangle + \alpha|1\rangle\langle 1||0\rangle + 3\beta|0\rangle\langle 0||1\rangle + \sqrt{3}\beta|1\rangle\langle 0||1\rangle + \sqrt{3}\beta|0\rangle\langle 1||1\rangle + \beta|1\rangle\langle 1||1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\alpha|0\rangle + \sqrt{3}\alpha|1\rangle + \sqrt{3}\beta|0\rangle + \beta|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\left(3\alpha + \sqrt{3}\beta\right)|0\rangle + \left(\sqrt{3}\alpha + \beta\right)|1\rangle\right)¶$$

После преобразования полученного выражения можно увидеть, что после прохождения через поляризатор (проектор) исследуемый кубит |ψ> перейдёт в состояние поляризатора |χ>:

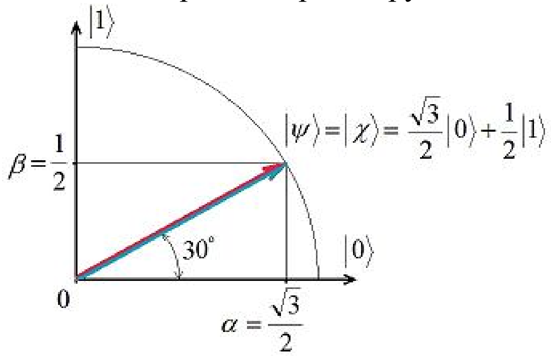
$$\left|\psi^{30}\right\rangle = \frac{3\alpha+\sqrt{3}\beta}{2}\left|0\right\rangle + \frac{\sqrt{3}\alpha+\beta}{2}\left|1\right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{1}\frac{\sqrt{3}\alpha+\beta}{2}\left|0\right\rangle + \frac{\sqrt{3}\alpha+\beta}{2}\left|1\right\rangle = \left(\sqrt{3}\alpha+\beta\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left|0\right\rangle + \frac{1}{2}\left|1\right\rangle\right)$$

$$\left|\psi^{30}\right\rangle = \left|\chi\right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|0\right\rangle + \frac{1}{2}\left|1\right\rangle ¶$$

Итак, любой измеренный поляризатором фотон перешёл в состояние проектора. Но с какой вероятностью это произошло? Вероятность прохождения кубита через поляризатор найдём по формуле, предлагаемой математикой квантовых вычислений:

$$P = \left|\left\langle\psi\middle|\chi\right\rangle\right|^2 = \left|\left(\alpha\langle 0| + \beta\langle 1|\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left|0\right\rangle + \frac{1}{2}\left|1\right\rangle\right)\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\langle 0\|0\rangle + \frac{1}{2}\beta\langle 1\|1\rangle\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right|^2$$

Исследуем теперь с помощью этого уравнения различные кубиты. Любой из этих кубитов после прохождения через поляризатор будет находиться в состоянии (1). Например, в простейшем случае, когда кубит коллинеарен поляризатору:

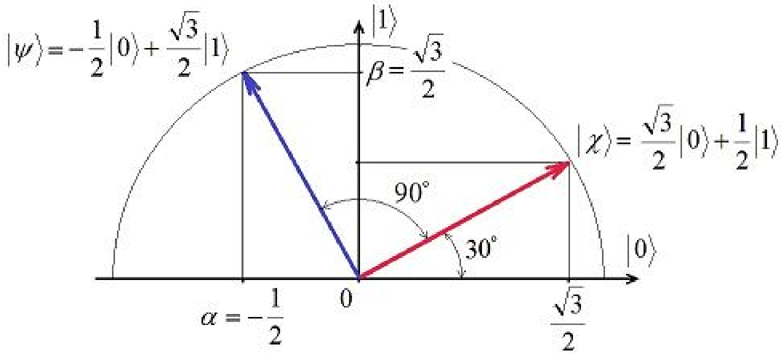


Вероятность прохождения через выбранный поляризатор такого коллинеарного кубита:

$$\left|\left\langle\psi\middle|\chi\right\rangle\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

Действительно, если кубит и поляризатор параллельны (собственный проектор), то кубит будет переведён в его состояние достоверно, то есть через этот поляризатор пройдут все фотоны потока.

Рассмотрим кубит, ортогональный нашему поляризатору:

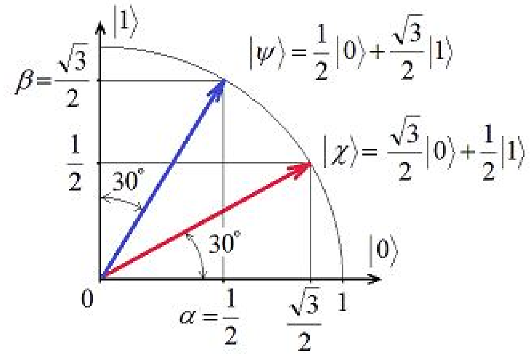


Вероятность прохождения через проектор такого ортогонального кубита:

$$\left|\left\langle\psi\middle|\chi\right\rangle\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 0$$

Так и должно быть: если поляризатор (проектор) имеет перпендикулярное направление к фотонам, то ни один фотон не пройдёт через него.

Если угол между кубитом и поляризатором равен 30°:



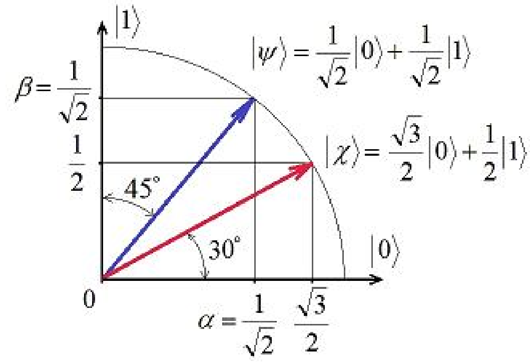
,

то вероятность прохождения кубита через этот поляризатор будет:

$$\left|\langle\psi|\chi\rangle\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Прикидочно, «на глазок» это легко принять: кубит и проектор (поляризатор) почти параллельны, близки друг к другу, поэтому фотонов пройдёт достаточно много.

Рассмотрим теперь кубит, имеющий поляризацию под углом 15° к нашему проектору:



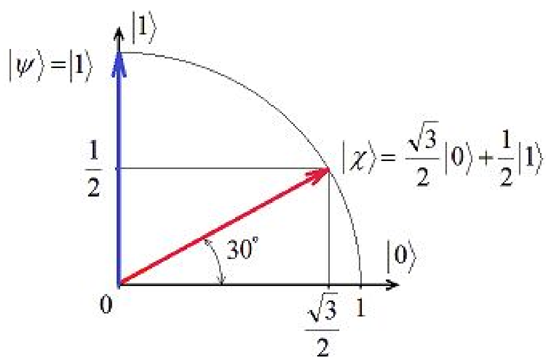
Вероятность прохождения через проектор такого наклонного кубита:

$$\left|\langle\psi|\chi\rangle\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$= \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{16} = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \approx \frac{3{,}73}{4}$$

Здесь угол между поляризатором и кубитом ещё меньше, чем в предыдущем примере, поэтому пройдёт ещё больше фотонов, что также выглядит правдоподобно.

Рассмотрим следующий кубит в состоянии |ψ>=|1>, то есть кубит, имеющий вертикальную поляризацию:

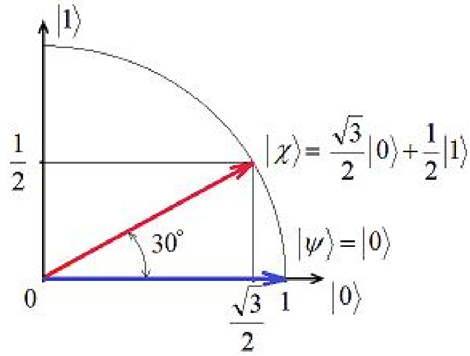


Этот кубит образует с поляризатором угол 60° и пройдёт через него с вероятностью:

$$\left|\langle\psi|\chi\rangle\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 1\right)^2 = \left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Угол между кубитом и поляризатором достаточно большой, поэтому вероятность прохождения кубитов через поляризатор невелика.

Рассмотрим другой кубит с базисной поляризацией - в состоянии $|\psi\rangle=|0\rangle$, то есть, имеющий горизонтальную поляризацию:

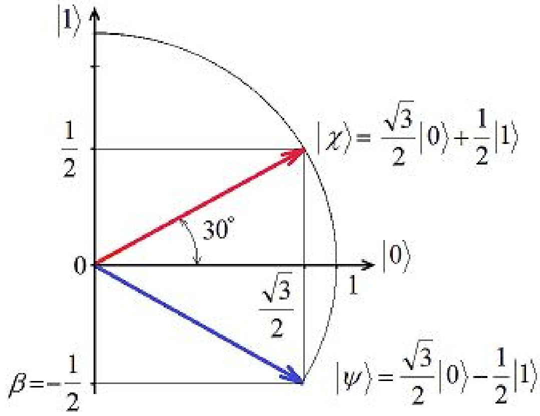


Вероятность его прохождения через поляризатор:

$$\left|\langle\psi|\chi\rangle\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 0\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Здесь уже можно заметить совпадение. Такую же вероятность прохождения имеет и фотон, имеющий угол наклона 30^o к вертикальной оси. И это совпадение не удивительно, ведь оба этих фотона образуют с поляризатором один и тот же угол - 30^o.

Ещё одно совпадение мы обнаружим при рассмотрении фотона, который образует с горизонтальной осью угол минус 30^o:



Этот фотон пройдёт через поляризатор с такой же вероятностью, что и вертикально поляризованный фотон:

$$\left|\langle\psi|\chi\rangle\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

В этом совпадении тоже нет ничего не удивительно, ведь оба этих фотона образуют с поляризатором один и тот же угол - 60^o.

В заключение необходимо заметить, что полученные вероятности относятся к фотонам, прошедшим через поляризатор. А что произошло с фотонами, которые не прошли через него? Это легко выяснить экспериментально, если использовать расщепляющий поляризатор. В этом случае остальные фотоны все без исключения пройдут на его ортогональный выход. То есть, все фотоны, не прошедшие через наш поляризатор, имеют поляризацию, ортогональную к поляризации прошедшего фотона. Соответственно, вероятности их ортогонального прохождения равны разнице между полной вероятностью – единицей и вероятностью прохождения фотонов через наш поляризатор:

$$P_{\perp} = 1 - \left|\langle\psi|\chi\rangle\right|^2$$

01.11.2013

Адрес статьи в интернете:
http://samlib.ru/editors/p/putenihin_p_w/z01.shtml

The task of quantum computing

Putenikhin P.V.

Abstract

Considered for training purposes task to measure the polarized photon streams with different polarization by the same polarizer. Calculating the probability of passing these photons are produced with the use of projective mathematics of quantum computing.